ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ:

1) $x+2=3 \Rightarrow x=1$ (Λύση στους Φυσικούς)
2) $x+3=2 \Rightarrow x=-1$ (Λύση στους Ακεραίους)
3) $2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (Λύση στους Ρητούς)
4) $x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (Λύση στους Πραγματικούς)
5) $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm i$ (Λύση στους Μιγαδικούς)

• Επέκταση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{Z}$:

$\forall(\mu,\nu)\in\mathbb{N}^2 : (\mu,\nu)\simeq(\mu',\nu') \Rightarrow \mu+\nu'=\nu+\mu'$

όπου είναι σχέση ισοδυναμίας

Έτσι, $\mathbb{Z}=\{[(\mu,\nu)] : \mu,\nu\in\mathbb{N}\}$ όπου $[(\mu,\nu)]=\mu-\nu$.

• Επέκταση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$:

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) : (\alpha,\beta)\simeq(\gamma,\delta) \Rightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$.

όπου είναι σχέση ισοδυναμίας

Έτσι, $\mathbb{Q}=\{[(\alpha,\beta)] : \alpha\in\mathbb{Z}, \beta\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ όπου $[(\alpha,\beta)]=\frac{\alpha}{\beta}$.

• Επέκταση του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$:

Έστω $\mathcal{I}=\{(x_\nu) : x_\nu\to 0\}$ και $\mathcal{S}=\{(y_\nu) : y_\nu$ βασική$\}$

ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $(x_\nu)\simeq(y_\nu) \Rightarrow (x_\nu-y_\nu)\in\mathcal{I}$

Έτσι, $\mathbb{R}=\{[(x_\nu)] : x_\nu\in\mathcal{S}\}$

Παράδειγμα: Η σταθερή ακολουθία είναι βασική

Έτσι, αφού εδώ ορίζαμε ότι κάθε βασική είναι συγκλίνουσα συμπεραίνουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες.

Ιστορική Αναδρομή των Μιγαδικών Αριθμών:

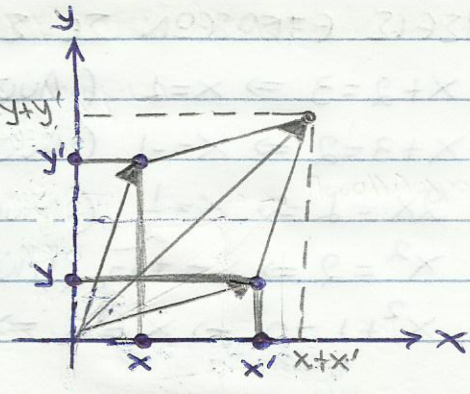
(1562) Bolbelli Algebra (έθεσε το ερώτημα)

(1693) Leibnitz (Ιnexistus)

(1777) Euler (Θεώρησε ότι $i=\sqrt{-1} \Rightarrow i^2=-1$ όπου $a+bi=z\in\mathbb{C}$)

(1801) Gauss-Cauchy

Στον $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε πράξη $+$, για τυχόν ζεύγος $(x,y)\in\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
τέτοια ώστε:



$(x,y)+(x',y')=(x+x',\ y+y')$

όπου $(\mathbb{R}^2,+)$ είναι αβελιανή ομάδα
διότι ισχύουν οι 4 προϋποθέσεις

1) $(x,y)+((x',y')+(x'',y''))=((x,y)+(x',y'))+(x'',y'')$
(η προσεταιριστική ιδιότητα)
2) $(x,y)+(0,0)=(0,0)+(x,y)=(x,y)$
(το ουδέτερο στοιχείο)
3) $(x,y)+(-x,-y)=(-x,-y)+(x,y)=(0,0)$
(το αντίθετο στοιχείο)
4) $(x,y)+(x',y')=(x',y')+(x,y)$
(η αντιμεταθετική ιδιότητα)

Τέλος, εφόσον η πράξη είναι κλειστή το $(\mathbb{R},+)$ είναι μία αβελιανή ομάδα.

Υποψήφιες πράξεις γινομένου στον $\mathbb{R}^2$

- $(x,y)\cdot(x',y')=xx'+yy'$ (Δεν είναι κλειστή στον $\mathbb{R}^2$)
- $(x,y)\times(x',y')=:$ κάθετο στα δύο διανύσματα. Άρα, είναι διάνυσμα "εκτός" του $\mathbb{R}^2$ (Δεν είναι κλειστή στον $\mathbb{R}^2$)

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε βαθμωτό γινόμενο:
$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ και ισχύουν:
1) $(\lambda+\mu)(x,y)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
2) $\lambda((x,y)+(x',y'))=\lambda(x,y)+\lambda(x',y')$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

Τελικά, για τον πολλαπλασιασμό ορίζουμε το γινόμενο $\cdot$
τέτοιο ώστε:
$(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',\ xy'+yx')$
όπου τελικά θα δούμε ότι το $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι σώμα, διότι πληρεί και τις εξής προϋποθέσεις:

1) $(x,y)((x',y')\cdot(x'',y'')) = ((x,y)\cdot(x',y'))\cdot(x'',y'')$ (Προσεταιριστικότητα)

2) $(x,y)\cdot(1,0) = (1,0)\cdot(x,y) = (x,y)$ (ουδέτερο στοιχείο)

3) για $(x,y) \neq 0$ το $(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ (Αντίστροφος)

(διότι $(x,y)\cdot(x,y)^{-1} = (1,0)$)

4) $(x,y)\cdot(x',y') = (x',y')(x,y)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ⓐ $(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$ και $(a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b,0)$
Έτσι, μια σύμβαση είναι από εδώ και πέρα τα στοιχεία της μορφής $(a,0)$ να "ταυτίζονται" με τα στοιχεία a του $\mathbb{R}$ (ουσιαστικά, θεωρούμε απεικόνιση $(a,0) \leftrightarrow a$). Έτσι, είναι άμεσο από τον παραπάνω ισχυρισμό ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, δηλαδή το $\mathbb{R}^2$ αποτελεί μία επέκταση του $\mathbb{R}$ με τις πράξεις $+, \cdot$.

Ⓑ $(a,b)\cdot(0,1) = (-b,a)$ και $(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$
Έτσι, αν θέσουμε ως $(0,1) = i$ τότε
$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a(1,0)+b(0,1) = a\cdot 1 + b\cdot i = a+bi$
όπου $i^2+1 = (0,1)\cdot(0,1)+(1,0) = (-1,0)+(1,0) = (0,0) = 0$
άρα το i είναι λύση της εξίσωσης $x^2+1=0$.

Έτσι, λαμβάνουμε ένα νέο σύνολο $\mathbb{C}$, το λεγόμενο σύνολο των μιγαδικών τέτοιο ώστε:
$\mathbb{C} = \{a+bi : a,b \in \mathbb{R}\}$
Δηλαδή, επεκτείναμε το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{C}$ αφού πληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις.

Τα υποσύνολα του $\mathbb{C}$:

1) Το $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών
2) Το σύνολο $I = \{bi \,/\, b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$ σύνολο φανταστικών
3) Το σύνολο $\mathbb{C}-\mathbb{R} = \{a+bi \,/\, a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0,\ i^2=-1\}$ το σύνολο των γνήσιων μιγαδικών

ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ:

$$a+bi = a'+b'i \Rightarrow a-a' = b'i-bi \Rightarrow a-a' = (b-b')i \overset{\text{ζώνη}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow (a-a')^2 = (b-b')^2 \cdot i^2 \Rightarrow (a-a')^2 = (b-b')^2 \cdot (-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-a')^2 + (b-b')^2 = 0 \Rightarrow (a-a')^2 = 0 \text{ και } (b-b')^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = a' \text{ και } b = b'.$$

Για τον μιγαδικό $z = a+bi$, το $Re(z) = a$ και $Im(z) = b$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα.

- Εάν $z = a+bi = 0 \Rightarrow a=0$ και $b=0$
- Εάν $z \cdot w = 0$ με $w \neq 0 \Rightarrow z = 0$

Απόδ

$w = \gamma+\delta i \neq (0,0)$ τ/ω $\gamma^2+\delta^2 \neq 0$ και $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$

$0 = w\cdot z = (\gamma+\delta i)(x+yi) = \gamma x - \delta y + (\gamma y + \delta x)i \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \gamma x - \delta y = 0 \\ \delta x + \gamma y = 0 \end{cases}$ με $D = \begin{vmatrix} \gamma & -\delta \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma^2+\delta^2 \neq 0$ και ομογενής άρα μοναδική λύση το $(x,y) = (0,0)$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ.

Οι μιγαδικοί στην πραγματικότητα δεν έχουν διάταξη $(\geq)$ και το αποδεικνύουμε ως εξής:

Έστω $i \neq 0$ με $i \geq 0 \Rightarrow i\cdot i \geq 0 \Rightarrow i^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq 0$

Άρα, $-1\cdot i \geq 0 \Rightarrow -i \geq 0 \Rightarrow i + (-i) = 0 \geq 0$ Άτοπο

Όμοια και για το $i \leq 0$

Έτσι ορίζουμε την εξής διάταξη:

$a+bi \sqsubset \gamma+\delta i \Leftrightarrow a < \gamma$ και εάν $a = \gamma \Rightarrow b < \delta$.

Εφαρμογές (θεωρία δίπλα).

1) για τον μιγαδικό $z = ((3+i)x + (5-3i)y)$ να βρείτε:

α. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος

β. Εκτίνα τα $x, y \in \mathbb{R}$: $z=0$

γ. Εκτίνα τα $x, y \in \mathbb{R}$: $z = 2+4i$

ΛΥΣΗ

α. $z = 3x+5y+(x-3y)i$, με $Re(z)=3x+5y$, $Im(z)=x-3y$

β. Πρέπει, $3x+5y=0$ και $x-3y=0$ και εφόσον, $D=-5$ και το σύστημα ομογενές τότε $(x,y)=(0,0)$

γ. Πρέπει, $2x+3y=2$ και $x-3y=4$ και εφόσον, $D\neq 0$ λύνουμε το σύστημα: $x=3y+4$ και $6y+8+3y=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9y=-6 \Rightarrow 3y=-2 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}$ και $x=-2+4 \Rightarrow x=2$

2) Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$S_1 = 1+i+i^2+\ldots+i^\nu$

ΛΥΣΗ

$$1+i+i^2+\ldots+i^\nu = \frac{i^{\nu+1}-1}{i-1} = S_1$$

- $\nu=4k$ τότε $S_1 = \frac{i^{4k+1}-1}{i-1} = \frac{i-1}{i-1} = 1$

- $\nu=4k+1$ τότε $S_1 = \frac{i^{4k+2}-1}{i-1} = \frac{-(\cancel{i-1})}{\cancel{i-1}} = -1$

- $\nu=4k+2$ τότε $S_1 = \frac{i^{4k+3}-1}{i-1} = \frac{-i-1}{i-1}$

- $\nu=4k+3$ τότε $S_1 = \frac{i^{4k+4}-1}{i-1} = 0$

3) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$S_2 = i+2i^2+3i^3+\ldots+\nu i^\nu$.

ΛΥΣΗ

$$S_2 = i(1+2i+3i^2+\ldots+\nu i^{\nu-1}) = i\left(\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}\right)'\Bigg|_{x=i} = \ldots$$